Curso 1º - Grado en Física

Examen de Análisis Matemático I

1. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - 4x - 6\log(x)$ para todo $x > 0$.

   a) Prueba que f alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}^+$ y determina el conjunto imagen $f(\mathbb{R}^+)$ de dicha función.

   c) Determina el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ en $\mathbb{R}^+$ y localiza dichas soluciones en intervalos disjuntos.

   Observaciones. Recuerda que $\log(x)$ es el logaritmo natural o neperiano de x. Razona con detalle tus respuestas.

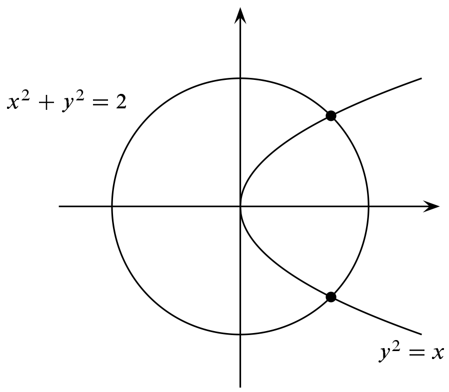
2. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río arriba, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 euros cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a 15 euros cada metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?.

3. a) Calcula el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x - x\ \cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^{1/x^2}$.

   b) Calcula la siguiente integral:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$$

4. Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 2$.



5. Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

$$\text{a)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{((3n)!)^2}{4^{6n}(n!)^6} \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}$$

Granada, 7 de septiembre de 2011